

# 2

Daysi Julissa García-Cuellar  
Jesús Victoria Flores Salazar

## APROXIMACIÓN INSTRUMENTAL: SUS ORÍGENES Y SU DESARROLLO EN PERÚ

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472.197-218

## INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la Educación Matemática en Perú se ha ido desarrollando con diversas investigaciones usando diferentes enfoques teóricos, uno de ellos es la Aproximación Instrumental.

En ese sentido, Artigue (2011) presenta el desarrollo y los aportes de la Aproximación Instrumental a la Educación Matemática como teoría necesaria, cuando se interactúa con tecnologías digitales. Explica que a inicios de los años 90's, participó en un proyecto de la Dirección de Tecnología del Ministerio de Educación de Francia. Este proyecto involucró estar a cargo de un grupo de expertos que investigaban el uso de calculadoras y *Computer Assistant System* - CAS en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel de secundaria.

La investigadora señala que a partir del contraste entre el discurso de los expertos sobre el potencial de los CAS con lo que realmente fue observado en las clases surgieron preguntas sobre el verdadero potencial de las tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y que este fue la primera semilla para lo que después sería la Aproximación Instrumental. Así mismo, en el proyecto que sucedió a este primero y en el que Michele Artigue trabajó con la calculadora simbólica T1-92, se investigó acerca de los conceptos y técnicas menos centradas en el estudiante y más orientadas a la dimensión instrumental de los procesos de aprendizaje. Es en este contexto en que la autora y su equipo de investigadores conectaron la Teoría Antropológica de lo didáctico - TAD con la perspectiva instrumental de la Ergonomía Cognitiva de Rabardel y Vérillon, y de esta conexión entre ambos aspectos teóricos de la Educación Matemática y de la Ergonomía Cognitiva, nace la Aproximación Instrumental. Un esquema que sintetiza esta afirmación se muestra en la figura 1.

Figura 1. Aproximación Instrumental

Teoría  
Antropológica  
do Didático



Perspectiva  
Instrumental



**Aproximação  
Instrumental**

Fuente: Elaboración propia.

Así, por parte de la TAD se estableció un marco conceptual que permite enfrentar las necesidades teóricas para realizar un análisis integral de los procesos de aprendizaje, que incluye el papel que tienen las técnicas en las prácticas humanas y el desarrollo conceptual que emerge de ellas. También, por otro lado, la perspectiva instrumental de la ergonomía cognitiva, que es una herramienta teórica que permite investigar el papel que las tecnologías digitales juegan en los procesos de aprendizaje, además comprender los procesos de apropiación de la tecnología digital por parte de los estudiantes.

En ese sentido, Artigue (2011) señala que la unión de la TAD con la perspectiva instrumental de la ergonomía cognitiva resultó ser muy productiva, ya que al realizar una experiencia con estudiantes de nivel secundario que utilizaron la calculadora T1-92 para resolver una tarea sobre funciones, en la que hizo un análisis desde la Aproximación Instrumental, consiguió “comprender mejor las causas de los efectos limitados de los esfuerzos institucionales realizados y cómo pudieran

provocarse cambios significativos a futuro" (ARTIGUE, 2011, p. 21). Ello porque identificó el valor epistémico y pragmático de las técnicas cuando se interactúa con tecnología digital.

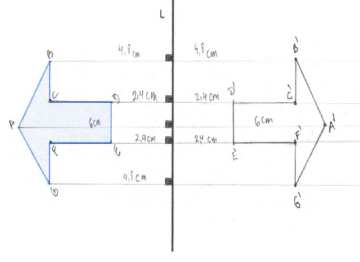
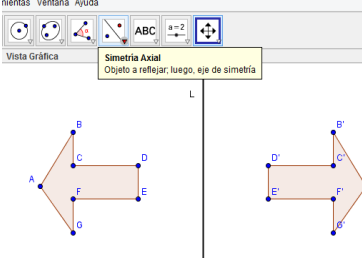
Entendemos por valor epistémico al que permite que el estudiante comprenda la matemática que se moviliza cuando resuelve una tarea, mientras que el valor pragmático está directamente relacionado con la mediación de la tecnología digital para resolverla; es decir, está relacionado con el potencial que tiene esta para ayudar a comprender los objetos involucrados. En palabras de Artigue (2011, p. 21),

Las tecnologías digitales trastornan los equilibrios tradicionales entre el valor epistémico y pragmático de las técnicas, equilibrios que se han establecido progresivamente al filo de la historia, en una cultura de lápiz y papel, aunque los cálculos han estado durante todo el tiempo instrumentados por diversas herramientas: ábacos, tablas numéricas, herramientas gráficas, etc. Los sistemas educativos encuentran dificultades evidentes para reaccionar de manera apropiada a estos trastornos. Pero estas dificultades no son independientes de la manera en la que, generalmente, estos sistemas tienden a adaptarse a las evoluciones tecnológicas, sólo viendo a la tecnología como un coadyuvante pedagógico o didáctico.

De lo anterior, podemos decir que las técnicas son diferentes al resolver una tarea con tecnología digital que al resolverla a lápiz y papel. En ese sentido, Artigue (2011) manifestó, en sus investigaciones iniciales con Aproximación Instrumental, la importancia de las técnicas instrumentadas en las clases de matemática, dado que esas técnicas difieren a las técnicas en lápiz y papel. Señaló que había una predisposición orientada al valor pragmático de las técnicas instrumentadas, pero lo que da la legitimidad educativa a una técnica no es sólo su valor pragmático, sino también su valor epistémico, por lo que se busca es una integración que permita un equilibrio entre estos dos valores de las técnicas instrumentadas asociadas a una tarea.

En el ejemplo presentado en la tabla 1, en donde la tarea es trazar el simétrico de una figura dada, se presentan dos técnicas, una con lápiz, papel y regla; y la otra con el uso del GeoGebra. En la técnica con lápiz, papel y regla, se logra observar algunos conocimientos movilizados como perpendicularidad, equidistancia, paralelismo e inclusive que se reconozca y trace cada punto simétrico de los vértices del polígono original; es decir podemos reconocer el valor epistémico de esta técnica. Sin embargo, en la técnica realizada con el GeoGebra no se puede evidenciar ello, dado que la tarea se realizó solo con la herramienta *simetría axial*, y no se observa su valor epistémico, pero el valor pragmático de la técnica con GeoGebra, dado que es más económica en cuanto a pasos o procedimientos que la de lápiz, papel y regla.

**Tabla 1 - Técnicas para trazar el simétrico de una figura**

Técnica con lápiz, papel y regla	Técnica con GeoGebra
	
<p>Se trazan rectas auxiliares perpendiculares al eje de simetría (recta L) que pasen por cada uno de los puntos de la figura (polígono ABCDEFG). Luego, se trazan los puntos equidistantes al eje de simetría y a los puntos A, B, C, D, E, F y G. Finalmente se traza el simétrico de la figura (polígono A'B'C'D'E'F'G').</p>	<p>Con la herramienta Simetría axial, se da clic al polígono ABCDEFG; luego, clic al eje de simetría (recta L) y se crea el polígono simétrico A'B'C'D'E'F'G'.</p>

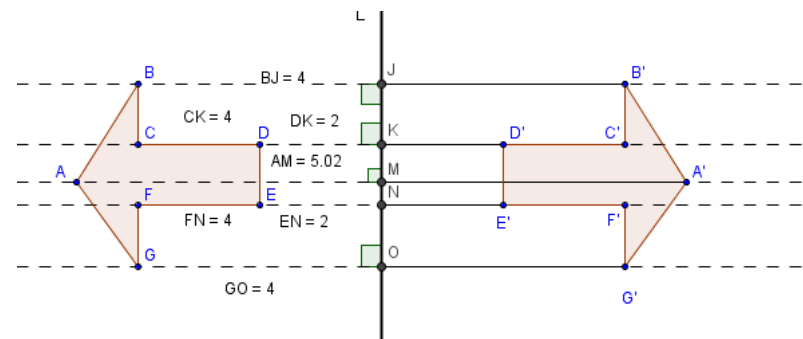
Fuente: Elaboración propia.



Cabe resaltar que en la actualidad la tendencia en el área de Educación Matemática es percibir a la tecnología digital como un medio para la construcción y/o movilización de conceptos matemáticos, lo que realza el valor epistémico de las técnicas, sin dejar de lado su valor pragmático.

En ese sentido, en la figura 2 se muestra una segunda técnica realizada con GeoGebra, en donde se ocultó la herramienta *simetría axial* de la barra de herramientas de dicho software. Al dar solución a la tarea (trazar el simétrico de una figura dada), se trazan rectas perpendiculares al eje de simetría (recta L) que pasen por cada uno de los vértices del polígono ABCDEFG. Luego, con la herramienta *punto de intersección*, se trazan los puntos J, K, M, N y O. Posteriormente, se mide la distancia que existe entre el punto B al punto J dando una medida de 4 cm, lo cual permite trazar el punto B' midiendo 4 cm desde J sobre la recta que contiene al segmento BJ. Este último procedimiento se realiza para cada uno de los vértices del polígono (puntos A, B, C, D, E, F y G). Finalmente se traza el simétrico de la figura (polígono A'B'C'D'E'F'G'). Esta técnica instrumentada permite evidenciar su valor epistémico, dado que se movilizan rectas perpendiculares, ángulos rectos, equidistancia, segmentos, entre otras nociones matemáticas, como también su valor pragmático, pues medidas como 5.02 cm (medida de AM) serían difíciles de realizar a lápiz, papel y regla, esto quiere decir que permite mediciones con mayor exactitud.

Figura 2. Técnica realizada con el GeoGebra en la cual se ocultó la herramienta simetría Axial



Fuente: Elaboración propia.

A seguir, explicamos algunos elementos importantes de la Aproximación Instrumental, lo que permitirá comprender este enfoque teórico.

## APROXIMACIÓN INSTRUMENTAL

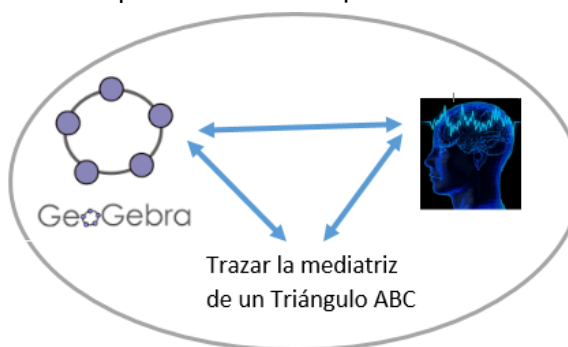
La Aproximación Instrumental - AI permite evidenciar los valores epistémicos y pragmáticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediada por la tecnología digital.

Las nociones-clave de la Aproximación Instrumental son las siguientes: *Esquema* - Es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de tarea. *Artefacto* - Da sustento a la actividad del sujeto en la ejecución de una de tarea, este puede ser material o simbólico. *Instrumento* - Es lo que un sujeto construye a partir de su interacción con un artefacto, por ello es una entidad mixta, pues contiene una parte artefactual, que puede ser material o no, y esquemas de utilización construidos por el sujeto durante su interacción con el artefacto.

Así, de acuerdo con Rabardel (1995), la perspectiva Instrumental estudia la diferencia que existe entre artefacto, instrumento y los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, transformación que denominó proceso Génesis Instrumental.

El investigador sostiene que el instrumento no existe en sí, sino que es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, y señala que el artefacto pasará al estado de instrumento cuando el sujeto desarrolla esquemas de utilización correspondientes. Por ejemplo, en la figura 3, se pide resolver la tarea *Trazar la mediatriz de un triángulo ABC*. En este ejemplo concreto, el artefacto será el GeoGebra y el estudiante o usuario utilizará sus herramientas para resolver la tarea, esto implica que generará esquemas de utilización, los cuales serán evidentes en sus acciones.

**Figura 3 - El instrumento como parte artefacto y esquemas de utilización para una tarea**



Fuente: Adaptado de Drijvers y Gravemeijer (2005, p. 166).

En cuanto a la Génesis Instrumental, esta consta de dos dimensiones: La instrumentalización y la instrumentación.

Los procesos de instrumentalización están dirigidos hacia el artefacto: selección, agrupación, producción e institución de funciones, usos desviados, atribuciones de propiedades,



transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento, etc. [...] los procesos de Instrumentación están relacionados con el sujeto: con la emergencia y evolución de los esquemas sociales de utilización y de acción instrumentada: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos, etc. (RABARDEL, 1995, p. 215).

Por lo anterior, las dos dimensiones de la Génesis Instrumental dependen de su orientación:

*La instrumentalización* está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento, consta del enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto. Es decir, es el resultado de la atribución de una función al artefacto por parte del sujeto. Este proceso se basa en las características y propiedades intrínsecas del artefacto. Dichas propiedades constituyen para el sujeto una propiedad permanente del artefacto. Mientras que la función adquirida es una propiedad extrínseca, la cual es atribuida por el sujeto para que el artefacto pueda ser constitutivo de un instrumento. El autor distingue dos niveles de instrumentalización por atribución de función a un artefacto.

En un primer nivel, la instrumentalización es local, relacionada con una acción singular y con circunstancias de su desarrollo. El artefacto es instrumentalizado momentáneamente [...] en un segundo nivel, la función adquirida se conserva de manera durable como propiedad del artefacto en relación con una clase de acciones, de objetos de la actividad y de situaciones. La instrumentalización es durable o permanente (RABARDEL, 1995, p. 217).

*La instrumentación* está dirigida hacia el sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas. En este proceso se lleva a cabo la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas, y la acomodación de los esquemas para dar nuevos significados a los artefactos.

En las dos fases de la Génesis Instrumental que se muestran en la figura 4, la instrumentalización está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento y la instrumentación, hacia la parte de formación de esquemas por parte del sujeto en una clase determinada de tareas dadas.

Figura 4 - Génesis Instrumental



Fuente: Adaptado de Trouche (2004).

En ese sentido, Bellemain y Trouche (2016) sostienen que estas dos fases no son independientes una de la otra, sino que son entrelazadas. Pero, para distinguirlas en el análisis de una tarea, se puede focalizar por un lado en el estudiante (¿En qué medida la integración de un nuevo artefacto modifica la forma de su actividad?) y, por otro lado, en el artefacto (¿En qué medida este aporta al vestigio de la actividad del estudiante, de su poder creativo?).

Otra perspectiva la brindan Drijvers *et al.* (2013) cuando presentan a la Aproximación Instrumental en términos de tres dialécticas: La *dialéctica artefacto-instrumento*, que describe el proceso de un artefacto que se convierte en un instrumento en manos de un usuario, lo que se conoce como génesis instrumental.

La *dialéctica instrumentación-instrumentalización*, que se refiere a la relación entre el artefacto y el usuario, se puede aplicar para mostrar cómo el conocimiento de un estudiante dirige el uso de un artefacto (instrumentalización), y cómo una herramienta puede moldear y afectar el pensamiento y las acciones de un estudiante (instrumentación). Finalmente, la *dialéctica esquema-técnica* se refiere a “las relaciones entre pensamiento y gesto (acciones)” (DRIJVERS *et al.*, 2013, p. 26). Desde una perspectiva práctica, las técnicas pueden verse como “la parte observable del trabajo de los estudiantes para resolver un tipo de tareas dadas (es decir, un conjunto de gestos organizados) y esquemas como los fundamentos cognitivos de estas técnicas que no son directamente observables” (DRIJVERS *et al.*, 2013, p. 27).

## NOCIÓN DE ESQUEMA EN LA APROXIMACIÓN INSTRUMENTAL

Rabardel (2011), a partir de esta noción de esquema de Vergnaud<sup>31</sup> (1996), define los *esquemas de utilización - EU* como el conjunto estructurado de las características generalizables de la acción que permiten repetirla o aplicarla en nuevos contextos. Estos esquemas, a su vez, pueden ser clasificados en esquemas de uso (dirigidas a tareas secundarias); *esquemas de acción instrumentada - EAI* (dirigidas a la tarea principal o primaria); y *esquemas de acción colectiva instrumentada - EAIC* (cuando el colectivo comparte el mismo instrumento o trabaja con la misma clase de instrumento, buscando alcanzar una meta en común).

<sup>31</sup> Para Vergnaud (1996), un esquema es una organización invariante de la actividad para una clase de situación dada. Está formado necesariamente por cuatro componentes: *Un objetivo*, sub-objetivo y anticipaciones; *Reglas de acción*, formada de informaciones y control; *Invariantes operatorias* (conceptos en acción y teoremas en acción); *Posibilidades de inferencias* en una situación.

En cuanto a los esquemas de uso y de acción instrumentada, Rabardel (2011) considera que un mismo esquema puede tener diferente estatus, es decir, puede ser esquema de uso o de acción instrumentada. Esto no se refiere a una propiedad del esquema en sí mismo, sino a su estatus dentro de la tarea realizada por el sujeto (su relación con una tarea principal o secundaria). Por lo tanto, según el objetivo de la tarea, se puede reconocer el estatus del esquema, como de uso o de acción instrumentada.

Con relación a las técnicas instrumentadas, Trouche (2005) y Andersen (2006) explican que éstas son la parte observable de un esquema de acción instrumentada. Es decir, que un esquema de utilización incluye técnicas y conceptos para usar un artefacto en una clase específica de tareas. Por lo que una técnica instrumentada, al incluir elementos conceptuales, permitiría reflejar el esquema acción instrumentada.

## APROXIMACIÓN INSTRUMENTAL: UN EJEMPLO

El ejemplo que se presenta es una experiencia se realizó con estudiantes de primer grado de Educación secundaria (12 o 13 años de edad), en una sala de informática en una escuela particular de Lima - Perú. La secuencia de tareas se realizó en dos encuentros donde se aplicaron tres tipos: la tarea N° 0, que tuvo la finalidad de familiarizar a los estudiantes con algunas herramientas del GeoGebra que permitieran el desarrollo de las tareas N°1 y N°2; la tarea N° 1, donde se centró en el desarrollo de esquemas de utilización de la simetría axial; y finalmente proponemos la tarea N° 2, donde se buscó que los estudiantes pongan en acción sus esquemas de utilización sobre el artefacto simbólico de simetría axial. Esta organización se puede observar en la tabla 2.

**Tabla 2 - Descripción de los encuentros de aplicación de las tareas**

<i>Tareas</i>	<i>Encuentro</i>	<i>Contenido</i>
<i>Tareas N° 0</i>	<i>I</i>	<i>Introducción al GeoGebra</i>
<i>Tareas N° 1 (A, B, C, D y E)</i>	<i>I y II</i>	<i>Simetría Axial</i>
<i>Tareas N° 2 (A, B y C)</i>	<i>II</i>	<i>Aplicaciones</i>

Fuente: García-Cuéllar (2014).

A continuación, se presenta el análisis *a priori* y *a posteriori* de la tarea 1C, que se elaboró y se planteó en la investigación de García-Cuéllar (2014). En el análisis *a posteriori* de la tarea 1C, mostramos las acciones y procesos realizados por una estudiante que denominamos Marcia.

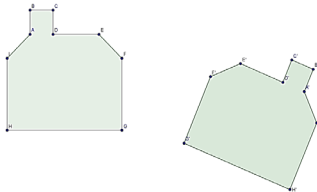
Cabe señalar que las tareas 1A y 1B fueron tratadas y discutidas en el artículo de García-Cuéllar y Salazar (2017), y las tareas 1C, 1D, 2A y 2C, en el artículo de García-Cuéllar y Salazar (2019).

## TAREA 1 C

En la figura 5, se presenta el enunciado de la tarea 1C de la secuencia realizada en la experiencia.



Figura 5 - Enunciado de la Tarea 1C

<p>Abre el archivo <i>tarea1_C.ggb</i>. Utilizando la herramienta punto medio, traza los puntos medios de los segmentos <math>AA'</math>, <math>BB'</math>, <math>CC'</math>, <math>DD'</math>, <math>EE'</math>, <math>FF'</math>, <math>GG'</math>, <math>HH'</math> e <math>II'</math>. Con la herramienta recta, traza la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente. Anota tus observaciones. Traza el segmento <math>AA'</math> y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? Traza <math>BB'</math> y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? ¿Qué puedes concluir con respecto a los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados? Justifica.</p>	
--	---

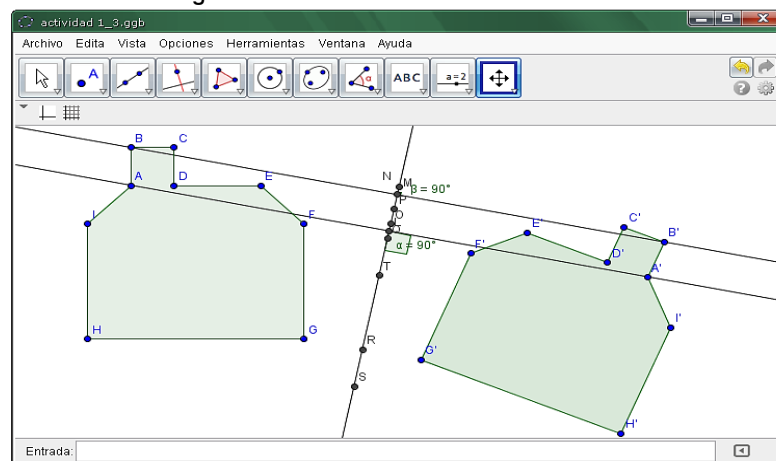
Fuente: García-Cuellar (2014).

La tarea tiene como finalidad trazar el eje de simetría no vertical, es decir, con inclinación y sin cuadrículas, dado que en la tarea 1A y 1B se trabajó con el eje de simetría vertical. *A priori*, se esperaba que los estudiantes eligiesen la herramienta punto medio y trazasen los puntos medios de los segmentos  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$ ,  $GG'$ ,  $HH'$  e  $II'$ . Luego, trazasen la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente. Finalmente, que midiesen los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados y reconociesen que son ángulos rectos.

Para dar solución a la tarea, los posibles esquemas de uso que los estudiantes movilizarían son: recta, segmentos, punto medio, ángulos, perpendicularidad. Y el posible esquema de acción instrumentada sería la noción de eje de simetría como mediatriz de los segmentos  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$ ,  $GG'$ ,  $HH'$  e  $II'$ .

*A posteriori*, la estudiante Marcia usó la herramienta punto medio del GeoGebra y trazó los puntos medios de los segmentos  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$ ,  $GG'$ ,  $HH'$  e  $II'$ , y luego utilizando la herramienta recta que pasa por dos puntos, trazó la recta que contiene a todos los puntos medios. Además, haciendo uso de la herramienta recta que pasa por dos puntos, trazó las rectas que pasan por los puntos  $A$  y  $A'$ , como también la recta que pasa por  $B$  y  $B'$ . Posteriormente, usó la herramienta ángulo para medir los ángulos formados en la intersección de las rectas que contienen a los segmentos  $AA'$  y  $BB'$  con la recta que contiene los puntos medios, tal como se muestra en la figura 6.

Figura 6 - Solución de Marcia en la Tarea 1C



Fuente: García-Cuellar (2014).

La figura 7 (a) muestra que Marcia logró identificar que la recta que trazó contiene a todos los puntos medios de ambos polígonos (ver figura 7 a). Asimismo, logró darse cuenta de que en la intersección de los segmentos con la recta se forman ángulos rectos, tal como lo menciona en la figura 7 (b), que se muestra un recorte de su ficha de trabajo.

Figura 7 - Respuesta de Marcia en la Tarea 1C

<p>Abre el archivo actividad_3.ggb. Utilizando la herramienta punto medio, traza los puntos medios de los segmentos AA', BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH' e II'. Con la herramienta recta, traza la recta que pasa por los puntos medios marcados anteriormente. Anota tus observaciones.</p> <p><i>todos los puntos se unen a través de una recta.</i></p>	<p>Traza el segmento AA' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? <i>90°</i> Traza BB' y mide un ángulo que se forma entre la intersección del segmento y la recta. ¿Cuánto mide el ángulo? <i>90°</i> ¿qué puedes concluir con respecto a los ángulos que se forman entre la intersección de la recta y los segmentos trazados? <i>justifica, que nunca, y a la vez si medido y a través de una recta se puede originar ángulos.</i></p>
--	---

(a)

(b)

Fuente: García-Cuellar (2014).

Con relación al análisis *a priori*, Marcia logró lo previsto para esta tarea. Es decir que las acciones de Marcia dan indicios de sus posibles esquemas de uso, como ángulo, recta, punto medio y mediatriz. Por lo anterior, podríamos indicar que generó el esquema de acción instrumentada *eje de simetría como mediatriz*.

En este breve ejemplo, en el que Marcia desarrolló una técnica instrumentada al dar solución a la Tarea en un ambiente tecnológico como el GeoGebra, nos permite identificar los valores pragmático y epistémico de esta técnica<sup>32</sup>. En cuanto al valor pragmático, se reconoce cuando se traza rectas y puntos medios con las herramientas propias del GeoGebra, sin necesidad de usar una regla, y por ende sin hacer mediciones que podrían no ser exactas con el uso de la regla, es el potencial que tiene la tecnología para hacer lo mismo que haríamos sin ella, de forma más eficaz o eficiente. Con respecto al valor epistémico, podemos decir que al generar el esquema de acción instrumentada *eje de simetría como mediatriz* se concibió este nuevo conocimiento a partir de comprender objetos involucrados, como punto medio, recta, ángulo recto, equidistancia, entre otros. En otras palabras, el valor epistémico de la técnica instrumentada está relacionado con el potencial que tiene ésta para ayudar a comprender objetos envueltos.

<sup>32</sup> Para Chevallard (1992), una técnica es una forma de hacer o de dar solución a una tarea. Para Drijvers y Gravemeijer (2005), una técnica que se realiza en un ambiente tecnológico es llamada *técnica instrumentada*.

Por otro lado, Balacheff (2000) indica que los valores pragmático y epistémico de las técnicas muchas veces están entrelazados y no es posible separarlos, esto está restringido y condicionado por las limitaciones que tenga la tecnología, las que pueden afectar el dominio de validez epistémico al hacer la transposición informática de los objetos matemáticos involucrados. En relación con lo señalado, podemos percibir que el GeoGebra es una tecnología que tiene gran potencial en la enseñanza, porque favorece a la identificación de los valores epistémico y pragmático de la técnica.

El ejemplo de la tarea 1C permite identificar que la estudiante Marcia desarrolló las fases de Instrumentalización e Instrumentación de la Génesis Instrumental. Esto porque en un primer momento desarrolló esquemas de uso de las herramientas del GeoGebra para poder dar solución a la tarea planteada, porque movilizó sus esquemas de uso, como las nociones de punto medio, recta, ángulo recto, segmento, entre otros; que permitieron generar el esquema de acción instrumentada *eje de simetría como mediatriz*, es decir, la Génesis instrumental relacionada con la tarea propuesta se dio en Marcia.

## INVESTIGACIONES EN PERÚ CON AI

A partir del estudio realizado por García-Cuéllar, Almouloud y Salazar (2019), se identificaron investigaciones en el periodo del 2013 al 2017 en los países de Brasil y Perú, que usaron como referencial teórico la Aproximación Instrumental - AI. Nos centramos en las realizadas en Perú, en el periodo del 2013 al 2019, específicamente por el Grupo de Investigación de Tecnologías y Visualización en Educación Matemática (TecVEM) y por estudiantes de la maestría en enseñanza de las matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. A continuación, la tabla 3, se esquematiza las investigaciones anteriormente mencionadas.

**Tabla 3 - Investigaciones de grupo TecVEM con AI**

<i>Autor</i>	<i>Año</i>	<i>Asesor(a)</i>
<i>Chumpitaz, L.</i>	<i>2013</i>	<i>Dra. Jesús Flores Salazar</i>
<i>García-Cuéllar, D.</i>	<i>2014</i>	<i>Dra. Jesús Flores Salazar</i>
<i>León, J.</i>	<i>2014</i>	<i>Mg. Miguel Gonzaga</i>
<i>Silva, M.</i>	<i>2017</i>	<i>Dra. Jesús Flores Salazar</i>
<i>Batallanos, J.</i>	<i>2018</i>	<i>Dra. Jesús Flores Salazar</i>
<i>López, P.</i>	<i>2019</i>	<i>Mg. Mihály Martínez-Miraval</i>

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 4 se presentan los artefactos de estudio en cada una de las investigaciones, así como las fases de la Génesis Instrumental en las cuales se enfatizó.

**Tabla 4 - Artefactos y fases de la Génesis Instrumental en las investigaciones**

<i>Autor</i>	<i>Artefactos</i>	<i>Fases de la Génesis Instrumental</i>
<i>Chumpitaz, L. (2013)</i>	<i>Función por tramos</i>	<i>Instrumentalización</i>
<i>García-Cuéllar, D. (2014)</i>	<i>Simetría axial</i>	<i>Instrumentación</i>
<i>León, J. (2014)</i>	<i>Elipse</i>	<i>Instrumentalización</i>
<i>Silva, M. (2017)</i>	<i>Circuncentro</i>	<i>Instrumentalización e instrumentación</i>
<i>Batallanos, J. (2018)</i>	<i>Volumen del octaedro regular</i>	<i>Instrumentalización e instrumentación</i>
<i>López, P. (2019)</i>	<i>Hiperboloide</i>	<i>Instrumentalización e instrumentación</i>

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede inferir, en las investigaciones mostradas en la tabla 4 se han enfatizado en los artefactos simbólicos. Es decir, los objetos matemáticos fueron los artefactos y luego de pasar por el proceso de la Génesis Instrumental se convirtieron en instrumentos para



los estudiantes de las distintas experiencias de estudio. Es importante mencionar que las investigaciones de Chumpitaz (2013), García-Cuéllar (2014) y León (2014) solo se enfocaron en una de las fases de la Génesis Instrumental (Instrumentalización o Instrumentación), y como lo indicaron Bellemain y Trouche (2016), estas fases de la Génesis Instrumental pueden ser focalizadas para el análisis de la investigación.

## CONCLUSIONES

El desarrollo de la Aproximación Instrumental, en términos de Artigue (2002), logró un avance en las investigaciones en Educación Matemática en cuanto al uso de tecnologías digitales (calculadoras CAS, hojas de cálculo, Software como el GeoGebra, entre otros), dado que permitió reconocer los valores pragmáticos y epistémicos de las técnicas instrumentadas. Sin embargo, podemos afirmar que las tareas también juegan un rol importante, pues depende de ellas la activación de ciertas técnicas y conocimiento, es por ello por lo que no deben ser simples adaptaciones de lo que se realiza con lápiz y papel. Las tareas que envuelven tecnologías deben permitir un equilibrio entre el valor epistémico y pragmático de las técnicas instrumentadas desarrolladas por los estudiantes.

A diferencia de otras realidades, específicamente de Europa, donde surgió la Aproximación Instrumental, en países de América Latina como Brasil y Perú, las investigaciones se han centrado en artefactos simbólicos. Es decir, se utilizó al mismo objeto matemático como artefacto, que mediante el proceso de Génesis Instrumental se transforma en Instrumento para el sujeto.

Los avances actuales de la aproximación instrumental se manifiestan en las investigaciones sobre la Orquestación Instrumental

(Trouche, 2004), que pone énfasis en el actuar del docente para generar la Génesis Instrumental de sus estudiantes. Trouche (2018) nos da un panorama de trabajo investigativo con los materiales y recursos de los docentes llamado Génesis Documental o Aproximación documental. En el caso de América Latina, específicamente en Perú, se están realizando investigaciones que abarcan aspectos de Orquestación Instrumental y se espera realizar estudios sobre la Aproximación documental.

## REFERENCIAS

ANDERSEN, M. Instrumented in tool-and object perspectives. In: C. Hoyles, J. Lagrange, L. H. Son, & N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth ICMI Study Conference "Technology Revisited"*, University of Hanoi, 2006, 19-26. Recuperado de: [http://ims.mii.lt/ims/konferenciju\\_medziaga/TechnologyRevisited/c63.pdf](http://ims.mii.lt/ims/konferenciju_medziaga/TechnologyRevisited/c63.pdf).

ARTIGUE, M. Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2002, 7, 245-274. Recuperado de: <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1022103903080#citeas>

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 2011, 6(8), 13-33. Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6948>.

BALACHEFF, N. Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En GORGORIÓ, M.; DEULOFEU, J. (Eds.). *Matemáticas y educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, 70–88. 2000. Barcelona: Editorial Grao.

BATALLANOS, J. *Génesis instrumental de la medida del volumen del octaedro regular mediada con Cabri 3D en estudiantes del cuarto grado de secundaria* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2018. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/20.500.12404/12143>

BELLEMAIN, F. B.; Trouche, L. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. / *Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática*, Nov. 2016. Bonito, Brasil. Recuperado de: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01560233>

CHEVALLARD, Y. A Theoretical Approach to Curricula. *Journal für Mathematikdidaktik*, 1992, 13, 2/3, pp. 215-230.

CHUMPITAZ, L. *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2013. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/20.500.12404/4514>

DRIJVERS, P.; GRAVEMEIJER, K. Computer Algebra as an Instrument: Examples of Algebraic Schemes. In: Guin D., Ruthven K., Trouche L. (eds) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Mathematics Education Library*, vol 36. Springer, Boston, MA, 2005.

DRIJVERS, P.; GODINO, J. D.; FONT, V.; TROUCHE, L. One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 2013, 82(1), 23–49.

GARCÍA-CUÉLLAR, D. Simetría axial mediada por el GeoGebra: un estudio con estudiantes de primer grado de educación secundaria (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú, 2014. doi: 10.13140/RG.2.2.13450.47048

GARCÍA-CUÉLLAR, D.; SALAZAR, J.V.F. Un estudio de la instrumentación de la noción de simetría axial por medio del uso del Geogebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 2017, v.6, 68-82. Recuperado de: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/28906>

GARCÍA-CUÉLLAR, D.; SALAZAR, J.V.F. Estudio de la génesis instrumental del artefacto simbólico simetría axial. *Tangram: Revista em educação matemática*, 2019, 2(3), 28-48. Doi: 10.30612/tangram.v2i3.9068

GARCÍA-CUÉLLAR, D.; ALMOULOU, S.A.; SALAZAR, J.V.F. Abordagem instrumental: uma revisão da literatura no Peru e no Brasil dos anos 2013 a 2017. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 2019, 32(2), 742-752. Recuperado de: [https://www.researchgate.net/publication/334046152\\_](https://www.researchgate.net/publication/334046152_)

LEÓN, J. *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el GeoGebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2014. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/20.500.12404/5652>

LÓPEZ, P. *Génesis instrumental del hiperboloide en estudiantes de arquitectura mediada con el GeoGebra* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2019. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/20.500.12404/13406>

RABARDEL, P. *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instrumentns contemporains*. Paris: Armand colin, 1995.

RABARDEL, P. *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (Trad. por M. Acosta) Colombia: Universidad Industrial de Santander, 2011.

SILVA, M. *Génesis instrumental del circuncentro con el uso del Geogebra en estudiantes de nivel secundario* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, 2017. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/20.500.12404/8727>

TROUCHE, L. Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2004, 9: 281–307.

TROUCHE, L. An Instrumental Approach to Mathematics Learning in Symbolic Calculator Environments. *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*. Guin, Dominique, Ruthven, Kenneth, Trouche, Luc (Eds.), 2005, 83-112.

TROUCHE, L. *Comprender el trabajo de los docentes a través de su interacción con los recursos de su enseñanza – una historia de trayectorias*. Revista Educación Matemática, 2018, 30(3), 9-40. doi: 10.24844/EM3003

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceptuais. En Jean Brun (org), *Didáctica das matemáticas*, pp. 155-189. Lisboa: Horizontes pedagógicos, 1996.